1 きむらもんだい★☆☆

1個のさいころを4回投げるとき，1の目が3回以上出る確率を求めよ。

解説

1の目が3回以上出る事象は，1の目がちょうど3回出る事象Aと1の目が4回出る事象Bとの和事象 $A\cup B$ である。

事象Aは，1の目が3回出て，残り1回は1以外の目が出る事象である。したがって，反復試行の確率の求め方を用いると

$$P(A)={}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{20}{6^4}$$

同様にして　$P(B)={}_4C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{6^4}$

AとBは互いに排反であるから，確率の加法定理により

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{20}{6^4}+\frac{1}{6^4}=\frac{21}{6^4}=\frac{7}{432}$$

2 うめたにもんだい★★☆

金貨と銀貨が1枚ずつある。これらを同時に1回投げる試行を行ったとき，金貨が裏ならば0点，金貨が表で銀貨が裏ならば1点，金貨が表で銀貨も表ならば2点が与えられるとする。この試行を5回繰り返した後に得られる点数を X とする。

(1)　$X=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=3$ となる確率を求めよ。

(3)　X が偶数となる確率を求めよ。ただし，0は偶数とする。

解説

(1)　試行を1回行うとき，それぞれの点数が得られる確率は，右の表のようになる。

点数	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$X=1$ となるのは，0点が4回，1点が1回のときであるから，求める確率は　${}_5C_4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{64}$

(2)　$X=3$ となるのは，

[1]　0点が2回，1点が3回

[2]　0点が3回，1点が1回，2点が1回

のいずれかの場合であるから，求める確率は

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{128}+\frac{20}{128}=\frac{25}{128}$$

(3)　X が偶数となるのは，1点となる回数が偶数のとき，すなわち1点が0回，2回，4回のときであるから，求める確率は

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)^5+{}_5C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)^3+{}_5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{243}{4^5}+\frac{270}{4^5}+\frac{15}{4^5}$$

$$=\frac{528}{1024}$$

$$=\frac{33}{64}$$

3 くわばらもんだい★★★

さいころを続けて100回投げるとき，1の目がちょうど k 回 $(0\leqq k\leqq 100)$ 出る確率は

${}_{100}C_k\times\frac{^{ア}\boxed{}}{6^{100}}$ であり，この確率が最大になるのは $k={}^{イ}\boxed{}$ のときである。

解説

さいころを100回投げるとき，1の目がちょうど k 回出る確率を p_k とすると

$$p_k={}_{100}C_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}={}_{100}C_k\times\frac{^{ア}5^{100-k}}{6^{100}}$$

ここで　$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{100!\cdot5^{99-k}}{(k+1)!(99-k)!}\times\frac{k!(100-k)!}{100!\cdot5^{100-k}}=\frac{100-k}{5(k+1)}$

$\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$ とすると　$\frac{100-k}{5(k+1)}<1$

両辺に $5(k+1)$ $[>0]$ を掛けて　$100-k<5(k+1)$

これを解くと　$k>\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$k\geqq16$ のとき　$p_k>p_{k+1}$

$\frac{p_{k+1}}{p_k}>1$ とすると　$100-k>5(k+1)$

これを解くと　$k<\frac{95}{6}=15.8\cdots$

よって，$0\leqq k\leqq15$ のとき　$p_k<p_{k+1}$

したがって　$p_0<p_1<\cdots\cdots<p_{15}<p_{16}$

$p_{16}>p_{17}>\cdots\cdots>p_{100}$

よって，p_k が最大になるのは $k={}^{イ}16$ のときである。

＜コメント＞

「さいころを１００回投げるとき、」とあるので反復試行の確率です。反復試行の確率の最大値や最小値を求める際に、上記のような方法を使うことが多くあります。センター試験でも問われる内容ですので、マスターしておきましょう。チャート数ⅠAのp274に類題があるのでこちらもチェックしておきましょう。