1 きむらもんだい★☆☆

1 枚の硬貨を投げて，表が出たときは数直線上の点 P を正の向きに 3 だけ進め，裏が出た
ときは P を負の向きに 2 だけ進める。硬貨を 5 回投げ終わったとき，P が最初の位置に
もどっている確率を求めよ。

解説

5 回のうち，表の回数を $r$ 回とする。

5 回投げ終わったとき，P が最初の位置にもどっているならば，$3r+(-2)\cdot(5-r)=0$ が
成り立つ。

これを解いて　$r=2$

よって，求める確率は，硬貨を 5 回投げて表がちょうど 2 回出る確率である。

したがって　$_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-2}=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

2 うめたにもんだい★★☆

30 階建てのビルの 11 階にある人物 A がいる。A は硬貨を投げて，表が出れば 1 階上へ，裏が出れば 1 階下へ移動する。硬貨を 10 回投げた後，A が 6 階より下の階にいる確率を求めよ。

解説

硬貨を 10 回投げたとき，表が出る回数を $n$ とすると，
裏が出る回数は $10-n$ であるから，A が 6 階より下の階にいるとき

$1\leqq 11+1\cdot n+(-1)\cdot(10-n)\leqq 5$

すなわち　$1\leqq 2n+1\leqq 5$

これを解くと　$0\leqq n\leqq 2$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^9+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^8=(1+{}_{10}C_1+{}_{10}C_2)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$
$$=\frac{1+10+45}{1024}$$
$$=\frac{56}{1024}$$
$$=\frac{7}{128}$$

3 くわばらもんだい★★★

1 辺の長さが 1 の正六角形の頂点を時計まわりの順に A，B，C，D，E，F とする。動点
P は最初は点 A 上にある。コインを投げ，表が出たら 2，裏が出たら 1 だけ P を正六角
形上で時計まわりに動かすゲームを考える。動点 P が最初にちょうど点 A 上に戻ったと
きゲーム終了とする。

(1)　ちょうど 1 周してゲーム終了となる確率を求めよ。

(2)　ちょうど 2 周してゲーム終了となる確率を求めよ。

解説

(1)　表が $m$ 回，裏が $n$ 回出たとする。

ちょうど 1 周してゲーム終了となるとき　$2m+n=6$

$m$，$n$ は 0 以上の整数であるから　$(m,\ n)=(0,\ 6)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 0)$

よって，求める確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^6+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{43}{64}$

(2)　ちょうど 2 周してゲーム終了となるのは，次の [1] → [2] → [3] の順に進む場合である。

[1]　A から F に進む

[2]　F から B に進む（A には止まらない）

[3]　B から A に進む

[1]　$2m+n=5$ から　$(m,\ n)=(0,\ 5)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 1)$

よって，確率は　$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{32}$

[2]　表が出るときであるから，確率は　$\frac{1}{2}$

[3]　この確率は [1] と同じであり　$\frac{21}{32}$

ゆえに，求める確率は　$\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{32}=\frac{441}{2048}$

＜コメント＞

ちょうど１周（２周）というのが問題のポイントですね。

(1)で容易なパターンを求めさせておいて、本題である(2)に進む、よくあるパターンです。

模範解答にあるように、２周目に行く際、F→Bに跳ぶことが解答の肝になるのですが、図を描いてイメージを膨らませると良いでしょう。

こちらもコインを何度も投げるため反復試行の確率です。

計算も含めてうろ覚えである場合は、これを機に復習しておきましょう。