◎x^{α} の不定積分

積分の定義

$F'(x)=f(x)$ のとき，

$\int f(x)dx = F(x)+C$ （C：積分定数）

$F(x)$：$f(x)$の原始関数

☆微分したら元に戻る！メチャ重要!!

※すべての式が積分できるわけではない．
（ほとんどの式ができない）

公式

$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C \ (\alpha \neq -1)$　（α：実数）

$\alpha=-1$ のとき，$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+C$　（絶対値をつける）

※以下，Cは積分定数とする．

P201例1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$（指数に直す）

$= \frac{1}{-1}x^{-1}+C$（逆数）

$= -\frac{1}{x}+C$

(2) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$（逆数）

$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

（補足）微分したら，元に戻る ← 最初のうちは，微分の復習がてらセットで練習するとよい．

$\left(-\frac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})'$

$= x^{-2}$

$= \frac{1}{x^2}$

$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{x}$

P201問1　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x^4 dx$

$= \frac{1}{5}x^5+C$

(2) $\int \frac{dx}{x^3}$

$= \int x^{-3}dx$

$= \frac{1}{-2}x^{-2}+C$（逆数）

$= -\frac{1}{2x^2}+C$

(3) $\int x^{\frac{2}{3}}dx$

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$

$\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C\right)$

(4) $\int x\sqrt{x}\,dx$

$= \int x^{\frac{3}{2}}dx$

$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C\right)$

☆数学Ⅱの積分で学んだ性質は成立（教科書 p.201参照）

P201例2　次の不定積分を求めよ。

$\int \frac{2x^2-4x+3}{x}dx = \int\left(2x-4+\frac{3}{x}\right)dx$

分母が単項式のときは項ごとに分ける．

$= 2\cdot\frac{1}{2}x^2-4x+3\log|x|+C$

$= x^2-4x+3\log|x|+C$

積分定数は1つにまとめて書けばOK

（補足）

$(x^2-4x+3\log|x|)'$

$= 2x-4+\frac{3}{x}$

$= \frac{2x^2-4x+3}{x}$

P201問2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2}dx$

$= \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= \int\left(\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx$

$= 2\log|x|+\frac{1}{-1}x^{-1}+C = 2\log|x|-\frac{1}{x}+C$

(2) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x}}dx$

$= \int\left(3\sqrt{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int\left(3x^{\frac{1}{2}}-4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}x^{\frac{3}{2}}-4\cdot 2x^{\frac{1}{2}} = 2x\sqrt{x}-8\sqrt{x}+C$

(3) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$

$= \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$

$= \int\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$= \int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$= x-2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+\log|x|+C = x-4\sqrt{x}+\log|x|+C$

◎三角関数の不定積分

公式

$(\cos x)' = -\sin x$ 微分したら元に戻る!! $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$(\sin x)' = \cos x$ → $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ → $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

$\left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ → $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

P202例3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (1+2\cos x)dx$

$= x + 2\sin x + C$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$

$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$

$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \tan x - x + C$

P202問3　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3\sin x - 4\cos x)dx$

$= -3\cos x - 4\sin x + C$

(2) $\int \frac{3+\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

$= \int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + \sin x\right)dx$

$= -\frac{3}{\tan x} - \cos x + C$

◎指数関数の不定積分

公式

$(e^x)' = e^x$ → $\int e^x dx = e^x + C$

$(a^x)' = a^x \log a$ → $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(参考) 忘れたときは、自分で導けるようにしておく

$y = a^x$ として、両辺の自然対数をとると、

$\log y = \log a^x$

$= x\log a$

両辺を x で微分すると、

$\frac{1}{y} \times y' = 1 \times \log a$

$y' = y\log a = a^x \log a$

P203例4　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (2e^x - 5)dx$

$= 2e^x - 5x + C$

(2) $\int 3^x dx$

$= \frac{3^x}{\log 3} + C$

P203問4　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (4e^x + 3)dx$

$= 4e^x + 3x + C$

(2) $\int (5^x - 2^x)dx$

$= \frac{5^x}{\log 5} - \frac{2^x}{\log 2} + C$

◎$f(ax+b)$ の不定積分

$F'(x) = f(x)$, $a \neq 0$ のとき、

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

カタマリ

※微分したものの逆数をかける

(証明)

$\left\{\frac{1}{a}F(ax+b)\right\}' = \frac{1}{a}F'(ax+b) \times \underbrace{(ax+b)'}_{a}$

合成関数の微分

$= F'(ax+b)$

$= f(ax+b)$

$\therefore \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ 終

P203例5　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (5x+2)^3 dx$　+1

$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}(5x+2)^4 + C$　カタマリ　逆数

$= \frac{1}{20}(5x+2)^4 + C$

$\left(\left\{\frac{1}{20}(5x+2)^4\right\}' = \frac{1}{20}\cdot 4(5x+2)^3\cdot 5 = (5x+2)^3\right)$

(2) $\int \cos 6x\,dx$

$= \frac{1}{6}\sin 6x + C$　カタマリ

$\left(\left(\frac{1}{6}\sin 6x\right)' = \frac{1}{6}\cos 6x \cdot 6 = \cos 6x\right)$

(3) $\int e^{2x-1}dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$　カタマリ

$\left(\left(\frac{1}{2}e^{2x-1}\right)' = \frac{1}{2}e^{2x-1}\cdot 2 = e^{2x-1}\right)$

微分して、元に戻るかを確認しよう!

P203問5　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (2x-7)^4 dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(2x-7)^5 + C$

$= \frac{1}{10}(2x-7)^5 + C$

(2) $\int \frac{1}{4x+1}dx$

$= \frac{1}{4}\log|4x+1| + C$

(3) $\int \frac{3}{(3x-5)^2}dx$

$= \int 3(3x-5)^{-2}dx$

$= 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}(3x-5)^{-1} + C$

$= -\frac{1}{3x-5} + C$

(4) $\int \sqrt{5-6x}\,dx$

$= \int (5-6x)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{1}{-6}\cdot\frac{2}{3}(5-6x)^{\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{1}{9}(5-6x)\sqrt{5-6x} + C$

(5) $\int e^{3x+2}dx$

$= \frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(6) $\int \sin(4x+3)dx$

$= \frac{1}{4}\{-\cos(4x+3)\} + C$

$= -\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$

◎置換積分法→具体例で確認!

P204例6　次の不定積分を求めよ。

$\int (2x-5)^3 dx$

$2x-5=t$ とおく

両辺を x で微分すると

$2=\dfrac{dt}{dx}$

$2dx=dt$　$\therefore dx=\dfrac{1}{2}dt$　dxを置換する式

(xで微分)dx=(tで微分)dt

$(与式)=\int t^3\cdot\dfrac{1}{2}dt$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}t^4+C$

$=\dfrac{1}{8}(2x-5)^4+C$　　$t=2x-5$ で元に戻す　忘れやすいので注意!

(参考)この式では、一般には置換は使わない。

$\int (2x-5)^3 dx$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}(2x-5)^4+C$

$=\dfrac{1}{8}(2x-5)^4+C$

⇒置換はできる限り使わないのが望ましい

P204問6　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (3x+2)^4 dx$

$3x+2=t$ とおく

$3dx=1\cdot dt$

$\therefore dx=\dfrac{1}{3}dt$

$(与式)=\int t^4\cdot\dfrac{1}{3}dt$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{5}t^5+C$　　$t=3x+2$

$=\dfrac{1}{15}(3x+2)^5+C$

(2) $\int e^{4x-1}dx$

$4x-1=t$ とおく

$4dx=1\cdot dt$

$\therefore dx=\dfrac{1}{4}dt$

$(与式)=\int e^t\cdot\dfrac{1}{4}dt$

$=\dfrac{1}{4}e^t+C$　　$t=4x-1$

$=\dfrac{1}{4}e^{4x-1}+C$

P205例題1　次の不定積分を求めよ。

$\int x\sqrt{x-1}\,dx$

$\sqrt{x-1}=t$ とおくと

$x-1=t^2$

$\therefore x=t^2+1$　　(xで微分)dx=(tで微分)dt

さらに、$dx=2t\,dt$

$(与式)=\int (t^2+1)\cdot t\cdot 2t\,dt$

$=\int (2t^4+2t^2)dt$

$=\dfrac{2}{5}t^5+\dfrac{2}{3}t^3+C$　　$\dfrac{6}{15}$　$\dfrac{10}{15}$

$=\dfrac{2}{15}t^3(3t^2+5)+C$　　$t=\sqrt{x-1}$ で元に戻す

$=\dfrac{2}{15}(\sqrt{x-1})^3\{3(x-1)+5\}+C=\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1}+C$

(別)　同じカタマリつくる

$(与式)=\int\{(x-1)+1\}(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$　調整

$=\int (x-1)^{\frac{3}{2}}dx+\int (x-1)^{\frac{1}{2}}dx$　カタマリ　カタマリ　+1　+1

$=\dfrac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$　逆数　逆数　$\dfrac{6}{15}$　$\dfrac{10}{15}$

$=\dfrac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}\{3(x-1)+5\}+C$

$=\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1}+C$

P205問7

$x-1=t$ とおいて、例題1を解け。

$x-1=t$ とおく

$1\cdot dx=1\cdot dt$

$\therefore dx=dt$

$\int x\sqrt{x-1}\,dx=\int (t+1)\sqrt{t}\,dt$

$=\int (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt$

$=\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$　　$\dfrac{6}{15}$　$\dfrac{10}{15}$　メモで通分しておく

$=\dfrac{2}{15}t^{\frac{3}{2}}(3t+5)+C$　　$t=x-1$

$=\dfrac{2}{15}(x-1)^{\frac{3}{2}}\{3(x-1)+5\}+C$

$=\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{x-1}+C$

P205問8　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと

$x+2=t^2$

$\therefore x=t^2-2$

さらに、$dx=2t\,dt$

$(与式)=\int (t^2-2)t\cdot 2t\,dt$

$=2\int (t^4-2t^2)dt$

$=2\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{2}{3}t^3\right)+C$　　$\dfrac{3}{15}$　$\dfrac{10}{15}$

$=\dfrac{2}{15}t^3(3t^2-10)+C$

$=\dfrac{2}{15}(\sqrt{x+2})^3\{3(x+2)-10\}+C$

$=\dfrac{2}{15}(3x-4)(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(2) $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x+3}}dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと

$x+3=t^2$

$\therefore x=t^2-3$

さらに、$dx=2t\,dt$

$(与式)=\int \dfrac{(t^2-3)^2}{t}\cdot 2t\,dt$

$=2\int (t^4-6t^2+9)dt$

$=2\left(\dfrac{1}{5}t^5-\dfrac{6}{3}t^3+9t\right)+C$　　$\dfrac{10}{5}$　$\dfrac{45}{5}$

$=\dfrac{2}{5}t(t^4-10t^2+45)+C$

$=\dfrac{2}{5}\sqrt{x+3}\{(x+3)^2-10(x+3)+45\}+C$

$=\dfrac{2}{5}\sqrt{x+3}(x^2+6x+9-10x-30+45)+C$

$=\dfrac{2}{5}(x^2-4x+24)\sqrt{x+3}+C$

(3) $\int \dfrac{9x}{\sqrt{3x-1}}dx$

$\sqrt{3x-1}=t$ とおくと

$3x-1=t^2$

$3x=t^2+1$　$\therefore x=\dfrac{1}{3}(t^2+1)$

さらに、$dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$

$(与式)=\int \dfrac{9\cdot\frac{1}{3}(t^2+1)}{t}\cdot\dfrac{2}{3}t\,dt$

$=\int \dfrac{3(t^2+1)}{t}\cdot\dfrac{2}{3}t\,dt$

$=2\int (t^2+1)dt$

$=2\left(\dfrac{1}{3}t^3+t\right)+C$　　$\dfrac{3}{3}$

$=\dfrac{2}{3}t(t^2+3)+C$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x-1}\{(3x-1)+3\}+C$

$=\dfrac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x-1}+C$

◎$f(g(x))g'(x)$ の不定積分

$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du$ → 具体例で確認！

※中身の微分が入っているとき．

P206例題 2　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int 2x(x^2+1)^3 dx$

$= \int (x^2+1)^3 (x^2+1)' dx$

カタマリ

$= \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C$

逆数

（補足 微分したら，元に戻ることを確認するとよい

$\left\{\frac{1}{4}(x^2+1)^4\right\}' = \frac{1}{4}\cdot 4(x^2+1)^3 \cdot 2x$

$= 2x(x^2+1)^3$）

(2) $\int \cos^2 x \sin x\, dx$

$= \int (\cos x)^2 \cdot (-\cos x)' dx$

$= -\int (\cos x)^2 (\cos x)' dx$

カタマリ

$= -\frac{1}{3}(\cos x)^3 + C \quad \left(= -\frac{1}{3}\cos^3 x + C\right)$

$\left(\left\{-\frac{1}{3}(\cos x)^3\right\}' = -\frac{1}{3}\cdot 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x)\right.$

$\left.= \cos^2 x \sin x\right)$

P207問 9　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 x \cos x\, dx$

$= \int (\sin x)^2 (\sin x)' dx$

$= \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C$

$= \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

(2) $\int 3x^2\sqrt{x^3-1}\, dx$

$= \int (x^3-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^3-1)' dx$

$= \frac{2}{3}(x^3-1)^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{3}(x^3-1)\sqrt{x^3-1} + C$

(3) $\int 2xe^{x^2} dx$

$= \int e^{x^2} \cdot (x^2)' dx$

$= e^{x^2} + C$

(4) $\int \frac{1}{x}\log x\, dx$

$= \int (\log x) \times (\log x)' dx$

$= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$

◎$\frac{f'(x)}{f(x)}$ の不定積分

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ → 具体例で確認！

※分母の微分したものが分子にあるとき．

P207例 7　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x}{x^2+4} dx$

$= \int \frac{(x^2+4)'}{x^2+4} dx$

カタマリ

$= \log|x^2+4| + C$

$= \log(x^2+4) + C \quad (x^2+4>0 より)$

$\left(\left\{\log(x^2+4)\right\}' = \frac{1}{x^2+4}\times 2x = \frac{2x}{x^2+4}\right)$

(2) $\int \tan x\, dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= \int \frac{(-\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\log|\cos x| + C$

$\left(\left\{-\log|\cos x|\right\}' = -\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x\right)$

P207問 10　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$

$= \int \frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2} dx$

$= \log|x^2+3x+2| + C$

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

$= \int \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} dx$

$= \log|1+e^x| + C$

$= \log(1+e^x) + C \quad (1+e^x>0 より)$

(3) $\int \frac{1}{\tan x} dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$

$= \log|\sin x| + C$

(4) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx$

$= -\int \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} dx$

$= -\log|1+\cos x| + C$

◎部分積分法 → 式の形が"積"のときしか使えない

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ダッシュの位置がズレる

コツ

$f(x)$：微分すると簡単になる式（例. 次数が下がる）
$g(x)$：積分することができる式（例. 循環する）
で設定する

典型的パターン

	$f(x)$	×	$g'(x)$	
① $\int$	(多項式)	×	$\sin x$	dx
② $\int$	(〃)	×	$\cos x$	dx
③ $\int$	(〃)	×	e^x	dx
④ $\int$	$\log x$	×	(多項式)	dx
⑤ $\int$	e^x	×	($\sin x$ or $\cos x$)	dx

P208例8　次の不定積分を求めよ。

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)'dx$$

ダッシュをズラす

$$= xe^x - \int \underbrace{(x)'}_{=1}e^x dx$$
$$= xe^x - \int e^x dx$$
$$= xe^x - e^x + C$$
$$(= (x-1)e^x + C)$$

$$\left(\begin{aligned}&(xe^x - e^x)'\\ &= 1\cdot e^x + x\cdot e^x - e^x\\ &= \cancel{e^x} + xe^x - \cancel{e^x}\\ &= xe^x\end{aligned}\right)$$

P208問11　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sin x\,dx$

$$= \int x(-\cos x)'dx$$
$$= x(-\cos x) - \int \underbrace{(x)'}_{=1}(-\cos x)dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + C$$

(2) $\int (x+3)e^x dx$

$$= \int (x+3)(e^x)'dx$$
$$= (x+3)e^x - \int \underbrace{(x+3)'}_{=1}e^x dx$$
$$= (x+3)e^x - \int e^x dx$$
$$= (x+3)e^x - e^x + C$$
$$= \{(x+3)-1\}e^x + C = (x+2)e^x + C$$

P209例題3　次の不定積分を求めよ。

$$\int x\cos 2x\,dx = \int x\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx$$
$$= x\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - \int \underbrace{(x)'}_{=1}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + C$$
$$= \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

$$\left(\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\right)'\\ &= \frac{1}{2}(1\cdot\sin 2x + x\cdot 2\cos 2x)\\ &\quad + \frac{1}{4}\cdot 2(-\sin 2x)\\ &= \cancel{\frac{1}{2}\sin 2x} + x\cos 2x - \cancel{\frac{1}{2}\sin 2x}\\ &= x\cos 2x\end{aligned}\right)$$

P209問12　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^{2x}dx$

$$= \int x\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$
$$= x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int \underbrace{(x)'}_{=1}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C$$
$$= \frac{1}{4}(2x-1)e^{2x} + C$$

(2) $\int (x-1)e^{-x}dx$

$$= \int (x-1)\cdot(-e^{-x})'dx$$
$$= (x-1)\cdot(-e^{-x}) - \int \underbrace{(x-1)'}_{=1}\cdot(-e^{-x})dx$$
$$= (-x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx$$
$$= (-x+1)e^{-x} - e^{-x} + C$$
$$= \{(-x+1)-1\}e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$$

(3) $\int (2x+5)\sin 2x\,dx$

$$= \int (2x+5)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$
$$= (2x+5)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int \underbrace{(2x+5)'}_{=2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2}(2x+5)\cos 2x + \int \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}(2x+5)\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

P209例題4　次の不定積分を求めよ。　☆理解して答は暗記！（$\log x$の積分はよく使う）

$$\int \log x\,dx = \int (\log x)\times(x)'dx$$
$$= (\log x)\cdot x - \int \underbrace{(\log x)'}_{=\frac{1}{x}}\cdot x\,dx$$
$$= x\log x - \int dx$$
$$= x\log x - x + C$$

$$\left(\begin{aligned}&(x\log x - x)'\\ &= 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1\\ &= \log x + 1 - 1\\ &= \log x\end{aligned}\right)$$

P209問13　次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\log x\,dx$

$$= \int (\log x)\times\left(\frac{1}{2}x^2\right)'dx$$
$$= (\log x)\cdot\frac{1}{2}x^2 - \int \underbrace{(\log x)'}_{=\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{2}x^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

(2) $\int \log(x+1)dx$　☆point!!

$$= \int \{\log(x+1)\}\times(x+1)'dx$$

約分できる！

$$= \{\log(x+1)\}\cdot(x+1) - \int \underbrace{\{\log(x+1)\}'}_{=\frac{1}{x+1}}\cdot\cancel{(x+1)}\,dx$$
$$= (x+1)\log(x+1) - \int dx$$
$$= (x+1)\log(x+1) - x + C$$

◎分数関数の不定積分

P210例題5　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{\boxed{x^2+3}}{\boxed{x+1}}dx$

☆分子の次数 > 分母の次数

⇨割り算をして次数を下げる！

準備

$$\begin{array}{r} x-1 \\ x+1 \enclose{longdiv}{x^2 \quad\quad +3} \\ x^2+x \\ \hline -x+3 \\ -x-1 \\ \hline 4 \end{array}$$

$x^2+3=(x+1)(x-1)+4$

割る式 × 商 + 余り

$\div(x+1)$

$\dfrac{x^2+3}{x+1}=x-1+\dfrac{4}{x+1}$

(与式) $=\displaystyle\int\left(x-1+\frac{4}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-x+4\log|x+1|+C$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

☆分母に積の形

⇨部分分数に分解！

(参考) $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$ を利用してもよい。

例 $\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}\right)$

$2 = (x+3)-(x+1)$

これを利用すると、

$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ とすぐに変形できる

ただし、どんな式にでも使えるわけではないので注意。

$\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ とすると、

$\times(x+1)(x+2)$

$1=a(x+2)+b(x+1)$

$1=(a+b)x+(2a+b)$

両辺比較して、

$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

(与式) $=\displaystyle\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{1}{x+2}dx$

$=\log|x+1|-\log|x+2|+C$

$=\log\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|+C$

P210問14　次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{x+2}dx$ $=\displaystyle\int\left(x-3+\frac{7}{x+2}\right)dx$

$=\dfrac{1}{2}x^2-3x+7\log|x+2|+C$

$$\begin{array}{r} x-3 \\ x+2 \enclose{longdiv}{x^2-x+1} \\ x^2+2x \\ \hline -3x+1 \\ -3x-6 \\ \hline 7 \end{array}$$

$x^2-x+1=(x+2)(x-3)+7$

$\dfrac{x^2-x+1}{x+2}=x-3+\dfrac{7}{x+2}$

(2) $\displaystyle\int \frac{2}{x(x+2)}dx$

$=\cancel{2}\displaystyle\int\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\log|x|-\log|x+2|+C$

$=\log\left|\dfrac{x}{x+2}\right|+C$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-3x+2}dx$

$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$ より

$\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ とおいて分母を払うと、

$x-3=a(x-2)+b(x-2)$

$x-3=(a+b)x-2a-b$

$\begin{cases} a+b=1 \\ -2a-b=-3 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

(与式) $=\displaystyle\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$=2\log|x-1|-\log|x-2|+C$

$=\log|x-1|^2-\log|x-2|+C$

$(x-1)^2$

$=\log\dfrac{(x-1)^2}{|x-2|}+C$

◎三角関数の不定積分 → 公式を利用して、計算できる式に変形

2倍角の公式

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$= 2\cos^2\alpha - 1$

変形 → 変形 → 変形 →

半角の公式

$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

これらは積分でよく利用する

積→和の公式

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

もよく利用する

(参考)式の導き方(省略して書くとよい)

$s(\alpha+\beta) = s\alpha c\beta + c\alpha s\beta$

$+)\ s(\alpha-\beta) = \ 〃\ -\ 〃$ 　加法定理

$s(\alpha+\beta)+s(\alpha-\beta) = 2s\alpha c\beta$

$\therefore\ s\alpha c\beta = \frac{1}{2}\{s(\alpha+\beta)+s(\alpha-\beta)\}$

積 → 和

$\alpha+\beta = A,\ \alpha-\beta = B$ とおくと

$\therefore\ sA + sB = 2s\dfrac{A+B}{2}c\dfrac{A-B}{2}$

和 → 積

☆ ~~すべて丸暗記~~ → 自分で導きながら、理解して覚えていく

P211例題6 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sin^2 x\,dx$

$= \int \dfrac{1-\cos 2x}{2}dx$

$= \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(2) $\int \sin 3x\cos 2x\,dx$

$= \int \frac{1}{2}\{\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)\}dx$

$= \frac{1}{2}\int(\sin 5x + \sin x)dx$

$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{5}(-\cos 5x) + (-\cos x)\right\}dx$

$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$

P211問15 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x\,dx$ 　半角の公式

$= \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}dx$

$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(2) $\int \cos 3x\cos x\,dx$ 　積→和の公式

$= \frac{1}{2}\int\{\cos(3x+x)+\cos(3x-x)\}dx$

$= \frac{1}{2}\int(\cos 4x + \cos 2x)dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$

$= \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

☆積分計算の練習ポイント

まずは一通りやるのが重要

① パターンごとにくり返し練習して身につける

↓

② 式を見て、どのパターンになるか判断する ← パッと見て、判断できるようになるまでくり返そう!

↳ 置換?部分積分?公式利用? etc...

↓

③ 答が出たら、微分して元に戻るか確認する ← 元に戻らなかったら再度やり直してみよう!